| Title | Inseparabelナ体ノ Arithmetik ニ関スル一注意 |
|---|---|
| Author(s) | 東屋, 五郎 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 259 p.597-p.600 |
| Issue Date | 1943-11-29 |
| oaire:version | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/75089 |
| rights | |
| Note | |

# 1156. inseparabel ナ体ノ Arithmetik ニ関スル一注意

東屋　五郎（名大）

浅野、中山両先生ハ學士院記事16巻(1940)，「A Remark on the Arithmetic in a subfield」ニ於テ

Kが整閉整域 $\mathfrak{O}$ ノ商体，$k$ がKニ對シテ有限次ナルKノ部分体トスルトキ，$\mathfrak{o}=\mathfrak{O}\cap k$ ナル整域ニテ gewöhnliche arithmetik ノ成立ツタメノ條件ヲ求メテ居ラレマスが、$K/k$ が rein inseparabel デ、且ツ Exponent が有限ナラバ、同様ノコトが成立ツコトニ關シテ簡單ナ注意ヲ述ベマス。

K, $\mathfrak{O}$ ヲ上記ノ意味トシ、$k$ ヲ $K/k$ が Exponent $p^e$ ノ rein inseparabel ナ部分体トスル（勿論 $p\neq 0$ ハKノ Charakteristik）。Kノ元ノ $p^e$ 乗ノ全体ヲ $K^{(p^e)}$ ＝テ表ハス（以下 $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ 等モ同様ノ意味ヲ表ハス）ナラバ、$K^{(p^e)}\subseteq k\subseteq K$ デアル。

$\mathfrak{o}=\mathfrak{O}\cap k$ トオケバ，$\mathfrak{o}$ ハ明ラカニ整閉整域デアルが、$k$ が $\mathfrak{o}$ ノ商体トナッテ井ル。何トナレバ $a\in k$ ヲ任意ニトルトキ、$a\alpha\in\mathfrak{O}$ ナル $\alpha(\neq 0)\in\mathfrak{O}$ がアルが $\alpha^{p^e}\in\mathfrak{O}\cap k=\mathfrak{o}$, $a\alpha^{p^e}\in\mathfrak{O}\cap k=\mathfrak{o}$ トナル故デアル。

更ニ、$\mathfrak{O}^{(p^e)}\subseteq\mathfrak{O}\cap k=\mathfrak{o}$ ナル故 $\mathfrak{O}$ ノ元ハスベテ $\mathfrak{o}$-ganz デアルが、勿論 $\mathfrak{O}$ が整閉ナルコトカラ $\mathfrak{o}$-ganz ナKノ元全

体ガ$\mathfrak{O}$ニ一致スルコトガ分ル。

逆ニ、$\mathfrak{o}$ヲ$k$ヲ商体トスル任意ノ整閉整域トシ、$\mathfrak{O}$ヲ$K$ノ$\mathfrak{o}$-ganz ナ元全体トスレバ、$\mathfrak{O}$ハ$K$ヲ商体トスル整閉整域デ $\mathfrak{o}=\mathfrak{O}\cap k$ ガ成立ツ。

即チ、$K$ヲ商体トスル整閉整域$\mathfrak{O}$ト$k$ヲ商体トスル整閉整域$\mathfrak{o}$トガ一對一ニ對應スル。

(ソノ時、更ニ全整閉(vollständig ganz-abgeschlossen)ナ整域同志ガ對應スル。何トナレバ、$\mathfrak{O}$ガ全整閉ナラ、$\mathfrak{o}$モサウデアルコトハ明ラカデアルガ、逆ニ$\mathfrak{O}$ヲ全整閉ト假定シ、$\lambda\alpha^{\nu}\in\mathfrak{O}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$, $\lambda(\neq 0)\in K$, $\alpha\in K$ トスレバ $\lambda^{p^e}\alpha^{p^e\nu}\in\mathfrak{O}^{(p^e)}\subseteqq\mathfrak{o}$, $\lambda^{p^e}(\neq 0)\in k$, $\alpha^{p^e}\in k$ ナル故、$\alpha^{p^e}\in\mathfrak{o}$ 従ッテ $\alpha\in\mathfrak{O}$ ナルコトガ分ル)

定理. <u>$\mathfrak{O},\mathfrak{o}$ヲ上ノ如キ意味トスレバ、$\mathfrak{O}$ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツタメノ必要且十分ナ條件ハ$\mathfrak{o}$ニ於テ、ソレガ成立ツコトデアル。</u>

証明. 先ヅ必要ナルコトハ、上記論文ノ証明ヲ少シ擴張スレバヨイノデスガ、念ノタメ述ベテミマスト$\mathfrak{a}$ヲ任意ノ$\mathfrak{o}$-Ideal トスル。$\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ナル$\mathfrak{O}$-Ideal ノ逆 Ideal ヲ$(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}$トセバ $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}=\mathfrak{a}\mathfrak{O}(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}=\mathfrak{O}$.

$\mathfrak{P}$ヲ任意ノ$\mathfrak{O}$ノ Primideal トシ、ソノ Bewertungsring ヲ$\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$トシ、$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}\cap k$ トオケバ、$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ハ$\mathfrak{P}$ガ$k$ニ於テ引起ス Bewertung ノ Bewertungsring デアルガ、$\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ナル$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$-Ideal ノ逆 Ideal ヲ$(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}$ニテ表ハセバ $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}=\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}=\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$

シカラバ $(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}\mathfrak{O} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ナル故

$$[(\mathfrak{a}\mathfrak{O}^{-1}]^{(p^e)} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \cap k = (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e};$$

$$[(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}]^{(p^e)} \subseteqq \bigcap_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}$$

従ッテ

$$\mathfrak{O}^{(p^e)} = \mathfrak{a}^{(p^e)}[(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}]^{(p^e)} \subseteqq \mathfrak{a}^{p^e}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right]$$

$$\subseteqq \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{a}^{p^e}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e} = \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$$

$$= \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \cap k = \mathfrak{O} \cap k = \mathfrak{o}$$

トナルガ $\mathfrak{O}^{(p^e)} \ni 1$ ナル故 $\mathfrak{a}^{p^e}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right] = \mathfrak{o}$. 即チ $\mathfrak{a}$ ガ逆 Ideal $\mathfrak{a}^{p^e-1}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right]$ ヲ有スルコトガ分ル。

逆ニ十分條件ナルコトノ證明ハ、今證明シタ必要條件ヲ使ッテ簡單ニ出來マス。

即チ，$\mathfrak{O}$ ニ於テ Arithmetik ガ成立ツト假定スル。$\mathfrak{O}$ 従ッテ $\mathfrak{O}$ ニ同型ナ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ハ整閉デ且ツ $\mathfrak{O}$ ハ $K$ ノ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ニ對スル Hauptordnung デアルカラ、$\mathfrak{O}^{(p^e)} = \mathfrak{O} \cap K^{(p^e)} = \mathfrak{O} \cap k \cap K^{(p^e)} = \mathfrak{O} \cap K^{(p^e)}$. 而シテ $k/K^{(p^e)}$ ハ Exponent ガ高々 $p^e$ ナル rein inseparabel ナ体ナル故ニ、上ノ必要條件ニヨリ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$, 従ッテ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ニ同型ナ $\mathfrak{O}$ ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツコトガ分ル。

コノ定理ヲ使ヒマスト、有名ナ「$k$ ガ整域 $\mathfrak{o}$ ノ商体デ $K$ ヲ $k$ ノ任意ノ有限次擴大体トシ，$\mathfrak{O}$ ヲ $K$ ノ $\mathfrak{o}$ ニ對スル Hauptordnung トスルトキ、若シ $\mathfrak{o}$ ニ於テ gewöhnliche

Arithmetik ガ成立ツナラバ、$\mathfrak{O}$ ニ於テモソレガ成立ツ」トイフコトノ一証明ガ得ラレマス。

即チ、$K_0$ ヲ $K/k$ ノ größter separabel Unterkörper トスレバ $K_0$ ノ $\mathfrak{o}$ ニ對スル Hauptordnung $\mathfrak{O}_0$ ハ通常ノ如ク endliche $\mathfrak{o}$-Modul ナルコトヨリ、$\mathfrak{O}_0$ ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツコトヲ証明スルトシテ、$K|K_0$ ガ有限次, rein inseparabel ナルコトカラ定理ニヨリ $\mathfrak{O}_0$ ニ對スル Hauptordnung $\mathfrak{O}$ ニ於テモ成立ツワケデアリマス。